ГЛАВА 3 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

3.1 Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов

Определение 1. Геометрическим вектором, или просто вектором, называется **направленный отрезок.**

Вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$, где точки A и B - начало и конец данного вектора, либо $\vec{a}$. Начало вектора называют **точкой его приложения**.

Определение 2. Вектор называется **нулевым,** если начало и конец его совпадают.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю. Это позволяет при записи отождествлять нулевой вектор с вещественным числом нуль.

Определение 3. Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Определение 4. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости.

Определение 5. Два вектора называются **равными**, если они коллиннеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

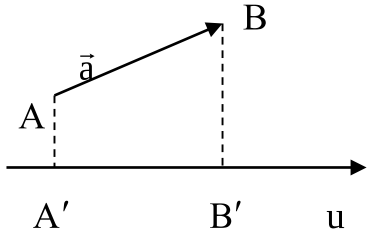
Все нулевые векторы считаются равными.

Определение 6. Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **вектор**, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$.

Определение 7. Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ называется такой **вектор** $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

Определение 8. Произведением $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину, равную $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{a}$ при $\alpha>0$ и противоположное направлению вектора $\vec{a}$ при $\alpha<0$.

Обозначим буквами A' и B' основания перпендикуляров, опущенных на ось u из точек A и B соответственно.



Определение 9. Проекцией вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось u называется величина $A'B'$ направленного отрезка $\overrightarrow{A'B'}$ оси u и обозначается $пр_u\vec{a}$. $пр_u\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$, где φ - угол между вектором $\vec{a}$ и осью u.

Любой вектор $\vec{a}$ может быть разложен по декартову прямоугольному базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Числа x, y, z - называется декартовыми прямоугольными координатами вектора $\vec{a}$. Обозначим буквами α, β и γ углы наклона вектора $\vec{a}$ к осям координат; $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

Длина вектора через его координаты имеет вид:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Направляющие косинусы вектора вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};\ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

откуда следует $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Определение 10. Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a}^0$, удовлетворяющий условиям:

1) $\vec{a}^0$ коллинеарен вектору $\vec{a}$,
2) $|\vec{a}^0| = 1$.

Координатами орта вектора являются направляющие косинуса.

Если два вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ заданы в декартовых прямоугольных координат $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k},$$

$$\alpha\vec{a} = (\alpha x_1)\vec{i} + (\alpha y_1)\vec{j} + (\alpha z_1)\vec{k}.$$

Условие коллинеарности векторов имеет вид:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Решение типовых примеров

Задача 1. Найти вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = (2;3;-1)$, $\vec{b} = (5;9;7)$.

Решение. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (2+5; 3+9; -1+7) = (7;12;6)$.

Задача 2. Найти вектор $\vec{d} = 4\vec{p} + 5\vec{q}$, если $\vec{p} = (4;5;-6)$, $\vec{q} = (8;2;1)$.

Решение. $4\vec{p} = (4\times4; 5\times4; -6\times4) = (16;20;-24)$

$5\vec{q} = (8\times5; 2\times5; 1\times5) = (40;10;5)$

Тогда:

$\vec{d} = 4\vec{p} + 5\vec{q} = (16+40; 20+10; -24+5) = (56; 30; -19)$.

Задача 3. Даны точки $A(1;\ 7;\ 0)$, $B(5;\ 7;\ 3)$, $C(7;\ 6;\ 5)$. Разложить вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и найти его длину, направляющие косинусы, орт вектора $\vec{a}$.

Решение. Найдем координаты векторов:

$\overrightarrow{AC} = (7-1; 6-7; 5-0) = (6; -1; 5)$

$\overrightarrow{BC} = (7-5; 6-7; 5-3) = (2; -1; 2)$.

Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = (6-2;\ -1-(-1); 5-2) = (4;\ 0;\ 3)$.

Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 0 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$, следовательно,

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \frac{3}{5}$, $\vec{a}^{\,0}\left\{\frac{4}{5};\ 0;\ \frac{3}{5}\right\}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти вектор $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (-4; 13; 1)$, $\vec{b} = (2; 3; 4)$.
2. Найти вектор $\vec{p} = 7\vec{m} + 9\vec{n}$, если $\vec{m} = (7; 1; -25)$, $\vec{n} = (21; -3; -8)$.
3. Даны точки $A(-2;3;6)$, $B(1;2;5)$, $C(-2;7;3)$. Разложить вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и найти его длину, направляющие косинусы, орт вектора $\vec{a}$.

3.2 Скалярное произведение векторов

Определение 11. Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha$$

Модулем вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ (или длиной вектора $\vec{a}$) называется корень квадратный из суммы квадратов координат вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ - произведение векторов коммутативно.
2) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$$

$$\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos 0° = |\bar{a}|^2 \Rightarrow \boxed{|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}}$$

3) Если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = 0}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos 90° = 0$$

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = |\bar{i}|^2 = 1; \quad \bar{i} \cdot \bar{j} = |\bar{i}| \cdot |\bar{j}| \cdot \cos 90° = 0$$

Причем, произведение одноименных орт равно единице, а разноименных орт равно нулю (см. таблицу):

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

4) Скалярное произведение векторов, заданных координатами равно сумме произведений одноименных координат:

$$\left(x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}\right) \cdot \left(x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}\right) =$$

$$= x_1 \cdot \bar{i} \cdot x_2 \cdot \bar{i} + \cancel{x_1 \cdot \bar{i} \cdot y_2 \cdot \bar{j}} + \cancel{x_1 \cdot \bar{i} \cdot z_2 \cdot \bar{k}} + \cancel{y_1 \cdot \bar{j} \cdot x_2 \cdot \bar{i}} + y_1 \cdot \bar{j} \cdot y_2 \cdot \bar{j} +$$

$$+ \cancel{y_1 \cdot \bar{j} \cdot z_2 \cdot \bar{k}} + \cancel{z_1 \cdot \bar{k} \cdot x_2 \cdot \bar{i}} + \cancel{z_1 \cdot \bar{k} \cdot y_2 \cdot \bar{j}} + z_1 \cdot \bar{k} \cdot z_2 \cdot \bar{k} =$$

$$= \boxed{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}$$

5) Из формулы скалярного произведения векторов можно найти косинус угла между двумя векторами: $\cos\alpha = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$

В координатной форме: $\cos\alpha = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

Решение типовых примеров

Задача 1. Перпендикулярны ли два вектора $\bar{a} = (3; -2; 6)$; $\bar{b} = (7; 4; 9)$. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$**.**

Решение. $3\cdot 7+(-2)\cdot 4+6\cdot 9=21-8+54=67\neq 0$, следовательно, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не перпендикулярны.

Задача 2. Даны два вектора $\overline{a}=(1;2;-2)$; $\overline{b}=(2;-1;2)$. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$**.**

Решение. $\cos\varphi=\dfrac{1\cdot 2+2\cdot(-1)+(-2)\cdot 2}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=-\dfrac{4}{3\cdot 3}=-\dfrac{4}{9}$

Тогда: $\varphi=\pm\arccos\left(-\dfrac{4}{9}\right)+2\pi n=\pm(\pi-\arccos\dfrac{4}{9})+2\pi n, n\in Z$

Задача 3. Найти угол α между векторами $\overline{p}=2\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{q}=\overline{a}-\overline{b}$**,** если $\overline{a}=(4;1;-2)$; $\overline{b}=(1;2;3)$.

Решение. Зная, что $\cos\varphi=\dfrac{\overline{p}\cdot\overline{q}}{|\overline{p}|\cdot|\overline{q}|}$, определим координаты векторов $\overline{p}$ и $\overline{q}$:

$$\overline{p}=(2\cdot 4+1;2\cdot 1+2;2\cdot(-2)+3)=(9;4;-1)$$

$$\overline{q}=(4-1;1-2;-2-3)=(3;-1;-5).$$

Найдем скалярное произведение векторов по их координатам:

$$\overline{p}\cdot\overline{q}=9\cdot 3+4\cdot(-1)+(-1)\cdot(-5)=27-4+5=28$$

Их длины равны:

$$|\overline{p}|=\sqrt{9^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{81+16+1}=\sqrt{98}$$

$$|\overline{q}|=\sqrt{3^2+(-1)^2+(-5)^2}=\sqrt{9+1+25}=\sqrt{35}$$

Тогда, $\cos\varphi=\dfrac{28}{\sqrt{98}\cdot\sqrt{35}}=\dfrac{28}{\sqrt{3430}}$,

следовательно, $\alpha=\pm\arccos\dfrac{28}{\sqrt{3430}}+2\pi n, n\in Z$.

Задания для решения в аудитории

1. Перпендикулярны ли векторы:

а) $\overline{a}=(7;-3;2)$; $\overline{b}=(1;7;7)$

б) $\overline{a}=(10;6;2)$; $\overline{b}=(2;3;1)$

в) $\overline{a}=(-4;9;5)$; $\overline{b}=(4;-9;-5)$

2. Даны два вектора $\overline{a} = (7;1;-25)$, $\overline{b} = (21;-3;-8)$. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
3. Даны вершины треугольника. Определить его внутренние углы, если A=(2;5;4), B=(3;1;-5), C=(0;-7;1).
4. Раскрыть скобки в выражении $(2i - j)\cdot j + (j - 2k)\cdot k + (i - 2k)^2$